

Trasformazione di specifiche
sul regime transitorio
i) tempo \Rightarrow frequenza
ii) anello chiuso \Rightarrow aperto (Nichols)

Fondamenti di Automatica

2014-15

A. De Luca, 6 Maggio 2015

- sistema di controllo del **primo ordine** (tipo 0)

$$W(s) = \frac{1}{1 + \tau s} \quad W(0) = 1 \quad G(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)} = \frac{1/\tau}{s}$$

$$\tau > 0$$

- risposta indiciale e modulo della risposta armonica

$$y(t) = L^{-1} \left[W(s) \frac{1}{s} \right] = 1 - e^{-t/\tau} \quad |W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

- tempo di salita, sovraelongazione, modulo alla risonanza, banda passante

istante $t_s > 0$: $\dot{y}(0)t_s = 1 \Rightarrow t_s = \tau$ istante $t_r > 0$: $y(t_r) = 0.5 \Rightarrow t_r \approx 0.69\tau$

$|y(t)| \leq 1, \forall t \geq 0 \Rightarrow \hat{s} = 0$ (assente) $|W(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \geq 0 \Rightarrow M_r = 0$ (assente)

pulsazione $\omega = B_3$: $|W(jB_3)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB} \Rightarrow B_3 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow B_3 \cdot t_s = 1$

- parametri risposta in frequenza **anello chiuso** \Rightarrow **anello aperto**

$$\omega_t = B_3 = \frac{1}{\tau}$$

$$m_\varphi = 90^\circ$$

- sistema di controllo del **secondo ordine** (tipo 0)

$$W(s) = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \quad W(0) = 1 \quad G(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)}$$

$$\omega_n > 0 \quad = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)} = \frac{\omega_n / 2\xi}{s \left(1 + \frac{1}{2\xi\omega_n} s\right)}$$

$$0 < \xi < 1$$

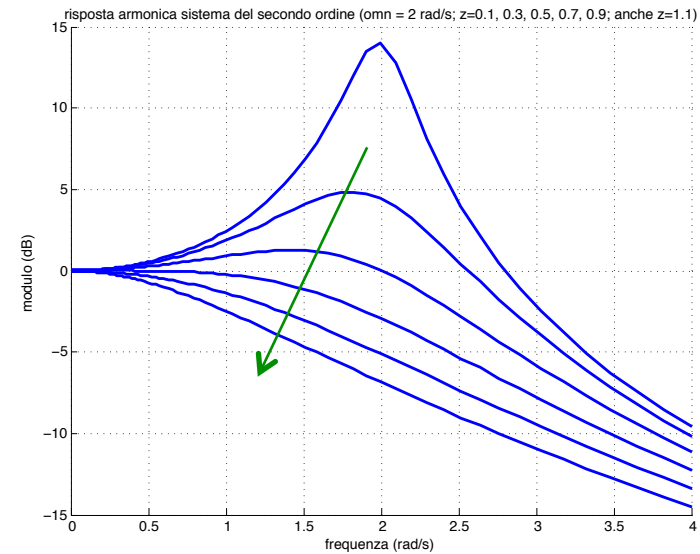
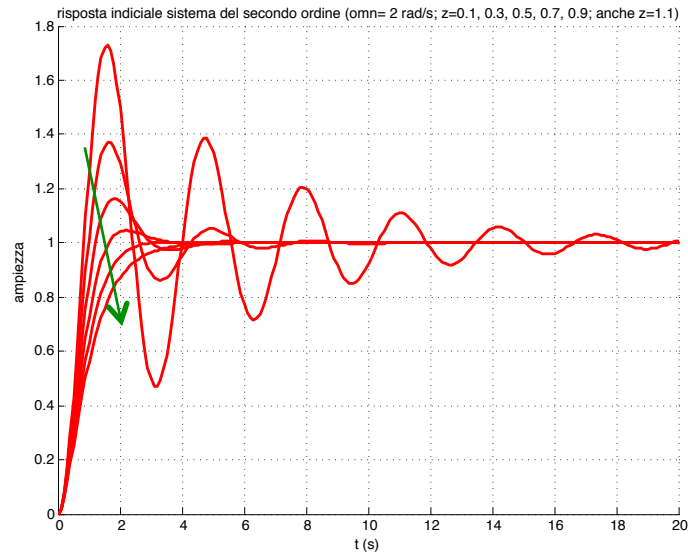
- risposta indiciale (al gradino unitario, dallo stato zero)

$$y(t) = L^{-1} \left[W(s) \frac{1}{s} \right] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right)$$

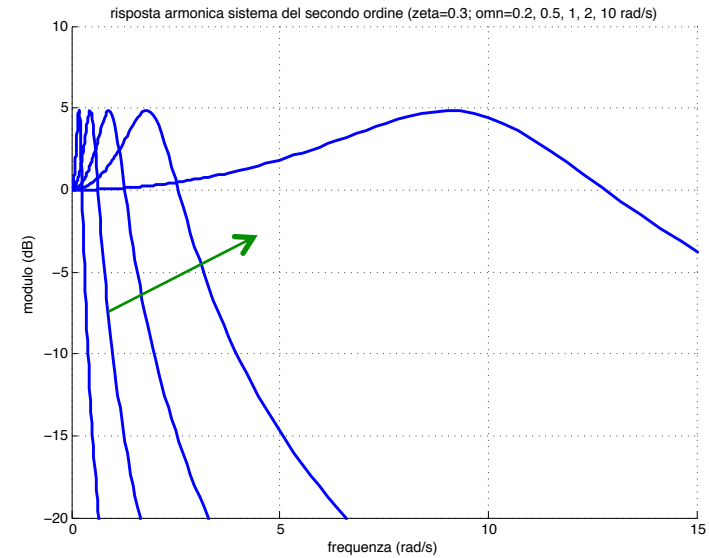
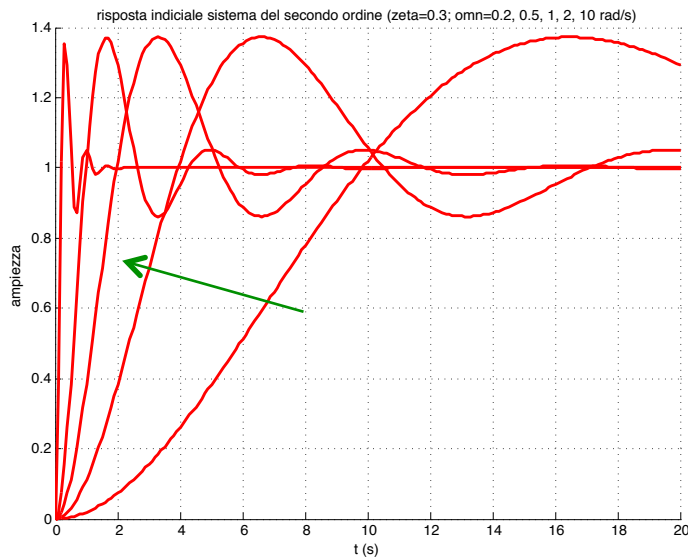
- modulo della risposta armonica

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

- risposta indiciale e risposta armonica ad anello chiuso al variare di ζ ($\omega_n = 2$ rad/s)



- risposta indiciale e risposta armonica ad anello chiuso al variare di ω_n ($\zeta = 0.3$)



- tempo di salita della risposta indiciale

primo istante $t_s > 0$: $y(t_s) = 1$

$$\Rightarrow t_s = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \left(\pi - \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \frac{1}{\omega_n} \hat{t}_s(\zeta)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} t_s = \infty \quad (\text{non interseca mai il valore di regime}) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} t_s = \frac{\pi}{2\omega_n} = \frac{T_n}{4} \quad (\text{un quarto del periodo di una sinusoide a pulsazione } \omega_n)$$

- sovraelongazione della risposta indiciale

primo istante $t_m > 0$: $\dot{y}(t_m) = 0 \Rightarrow y(t_m) = 1 + \hat{s}$

$$\Rightarrow \hat{s} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

il valore al primo
"massimo" della risposta
(vale anche $\dot{y}(0) = 0$,
ma è un minimo)

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \hat{s} = 0 \quad (\text{non c'è nessuna sovraelongazione}) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \hat{s} = 1 \quad (\text{i picchi sono ripetuti e pari al doppio del valore desiderato di regime})$$

- tempo di assestamento a $\pm \varepsilon$ della risposta indiciale

primo istante $t_a > 0$: $\forall t \geq t_a \Rightarrow |1 - y(t)| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow t_a = \frac{\left| \ln(\varepsilon \sqrt{1-\zeta^2}) \right|}{\zeta \omega_n}$$

- **pulsazione e modulo alla risonanza** della risposta armonica

pulsazione $\omega_r > 0$: $\frac{d}{d\omega} [|W(j\omega)|]_{\omega=\omega_r} = 0 \Rightarrow M_r = |W(j\omega_r)|$

$\Rightarrow \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ solo per $\zeta \leq 1/\sqrt{2} \approx 0.707$

$\Rightarrow M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$ (in termini assoluti, da esprimersi poi in dB)

- **banda passante (a -3 dB)** della risposta armonica

pulsazione $\omega = B_3$: $|W(jB_3)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$

$\Rightarrow B_3 = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} = \omega_n \hat{B}_3(\zeta)$

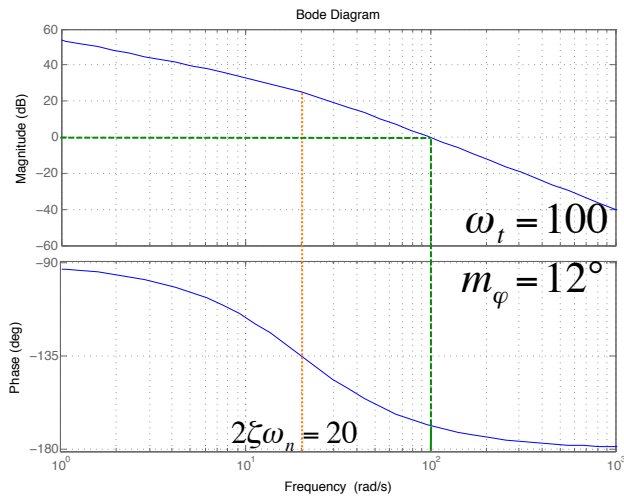
- banda passante \times tempo di salita funzione solo di ζ : $B_3 \cdot t_s = \omega_n \hat{B}_3(\zeta) \cdot \frac{1}{\omega_n} \hat{t}_s(\zeta) = \hat{B}_3(\zeta) \cdot \hat{t}_s(\zeta)$

- parametri risposta in frequenza **anello chiuso** \Rightarrow **anello aperto** $G(s) = \frac{\omega_n / 2\xi}{s \left(1 + \frac{1}{2\xi\omega_n} s \right)}$

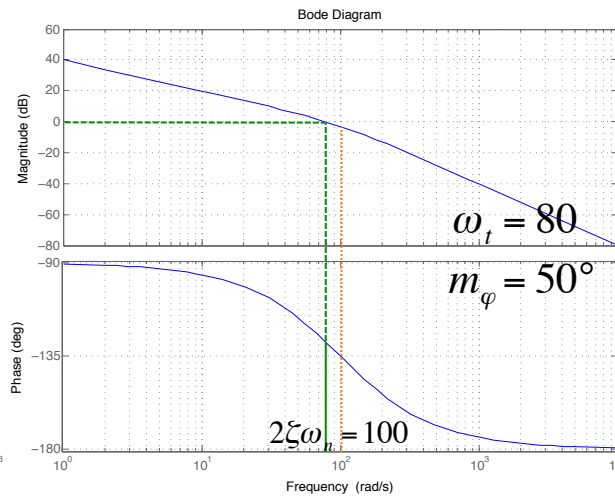
(assumendo $K_G = \frac{\omega_n}{2\xi} > 1$)

$0 \leftarrow \zeta < 0.5 :$	$\omega_t \rightarrow \omega_n^- < 1.5\omega_n \leftarrow B_3$	$m_\varphi < 45^\circ \rightarrow 0^\circ$
$\zeta = 0.5 :$	$\omega_t = 0.8\omega_n < 1.27\omega_n = B_3$	$m_\varphi = 50^\circ$
$0.5 < \zeta \rightarrow 1 :$	$\omega_t \rightarrow 0.5\omega_n < \omega_n \leftarrow B_3$	$m_\varphi > 45^\circ \rightarrow 90^\circ$

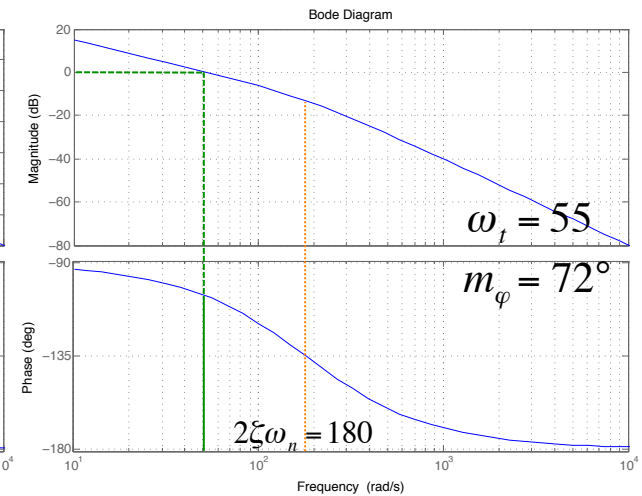
$\omega_n = 100, \zeta = 0.1$



$\omega_n = 100, \zeta = 0.5$



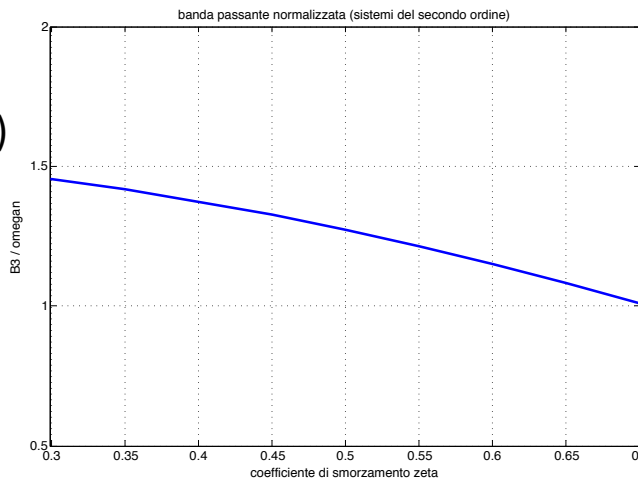
$\omega_n = 100, \zeta = 0.9$



banda passante (normalizzata)

al variare di ζ

$$\frac{B_3}{\omega_n} = 1 \div 1.5$$

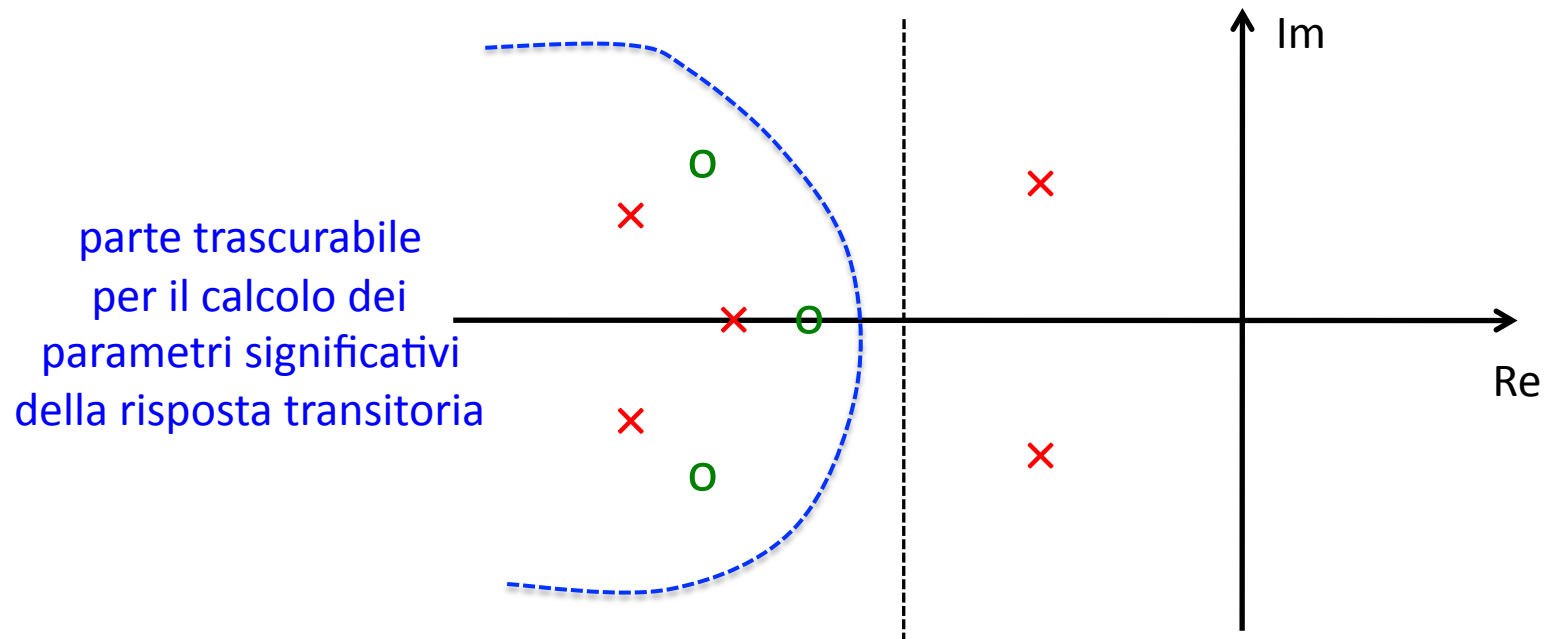


↓

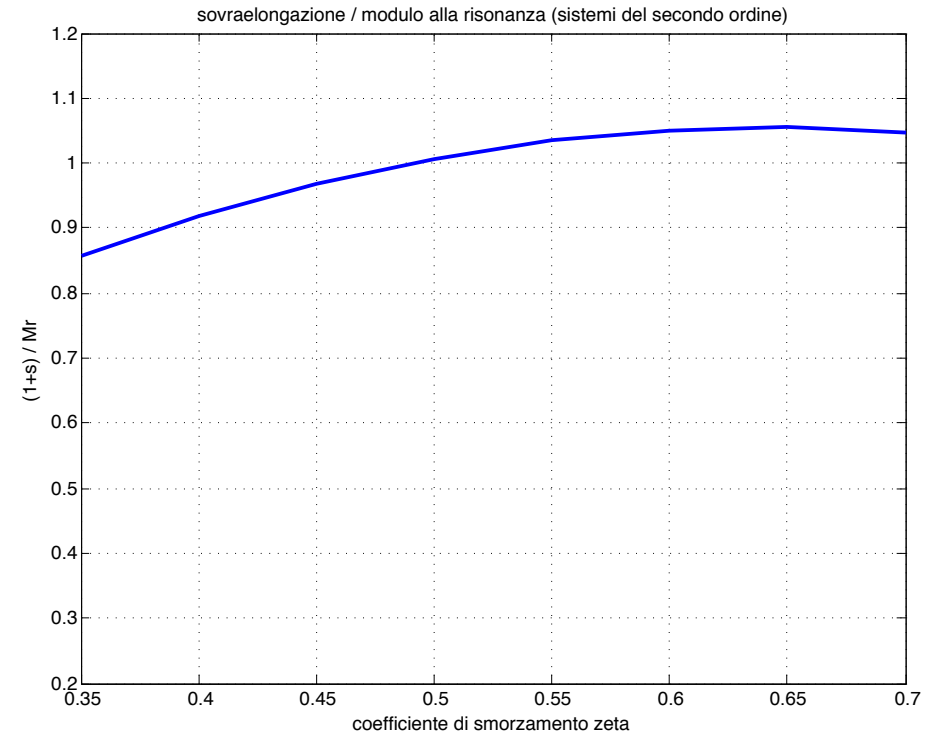
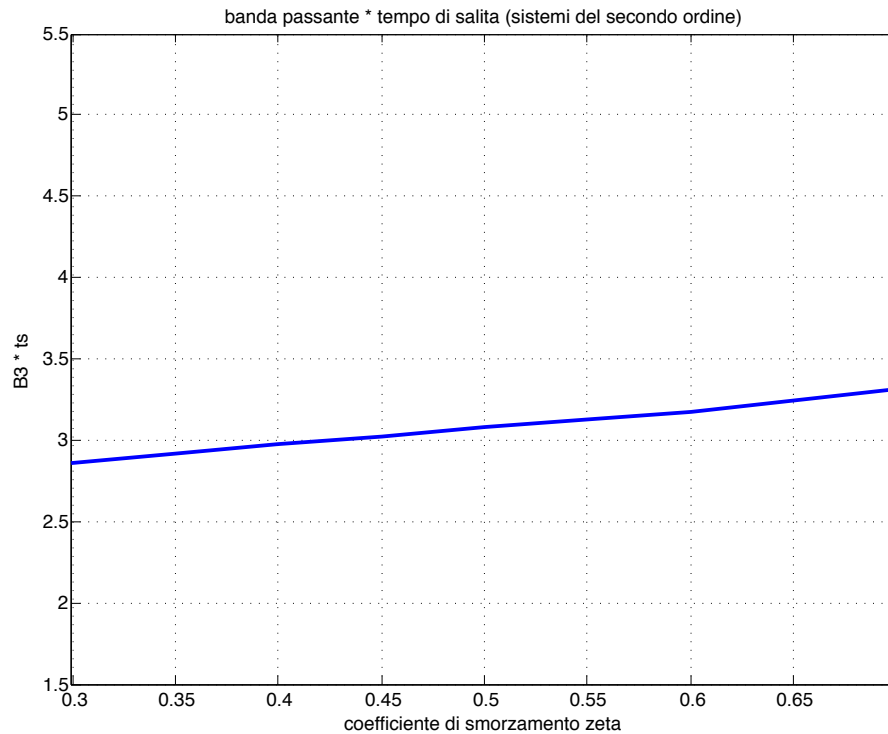
$$\omega_t \leq B_3 \leq 1.5\omega_t$$

- sistema di controllo con **poli dominanti** (tipo 0)

$$W(s) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 + \tau s} \\ \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2} \end{array} \right. \times \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots} \quad W(0) = 1$$



legami "empirici" tra parametri delle risposte indiale e armonica ad anello chiuso



$$B_3 \cdot t_s = \sqrt{1 - 2\xi^2} + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}$$

↑
banda
in rad/s

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left(\pi - \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \approx 3$$

$$\frac{1 + \hat{s}}{M_r} = \left(1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \right) \cdot 2\xi\sqrt{1 - \xi^2} \approx 0.85$$

↑
modulo
NON in dB

ricavati per sistemi di controllo del **secondo ordine**,
utilizzati anche per tipologie con coppia di **poli dominanti**

- legame generale tra parametri della risposta in frequenza ad **anello chiuso** e **ad anello aperto**

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)} \quad \Leftrightarrow \quad y(s) = W(s)y_d(s)$$

$$F(s) = \frac{1}{K_d} G(s) = \frac{1}{K_d} P(s)C(s)$$

- **diagramma di Nichols**: rappresentazione **parametrica** in ω della risposta armonica su assi di **modulo** e **fase**

$$F(j\omega) = A(\omega)e^{j\alpha(\omega)} \quad \Rightarrow \quad W(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$M(\omega) = \left| \frac{A(\omega)e^{j\alpha(\omega)}}{1 + A(\omega)e^{j\alpha(\omega)}} \right| = M(A, \alpha)$$

$$\phi(\omega) = \left\langle \frac{A(\omega)e^{j\alpha(\omega)}}{1 + A(\omega)e^{j\alpha(\omega)}} \right\rangle = \phi(A, \alpha)$$

$$\forall \omega \geq 0$$

carta di Nichols

- due sistemi di coordinate:
- rettilinee (α, A) per $F(j\omega)$
 - curvilinee (ϕ, M) per $W(j\omega)$

$$M(A, \alpha) = M(A, -\alpha)$$

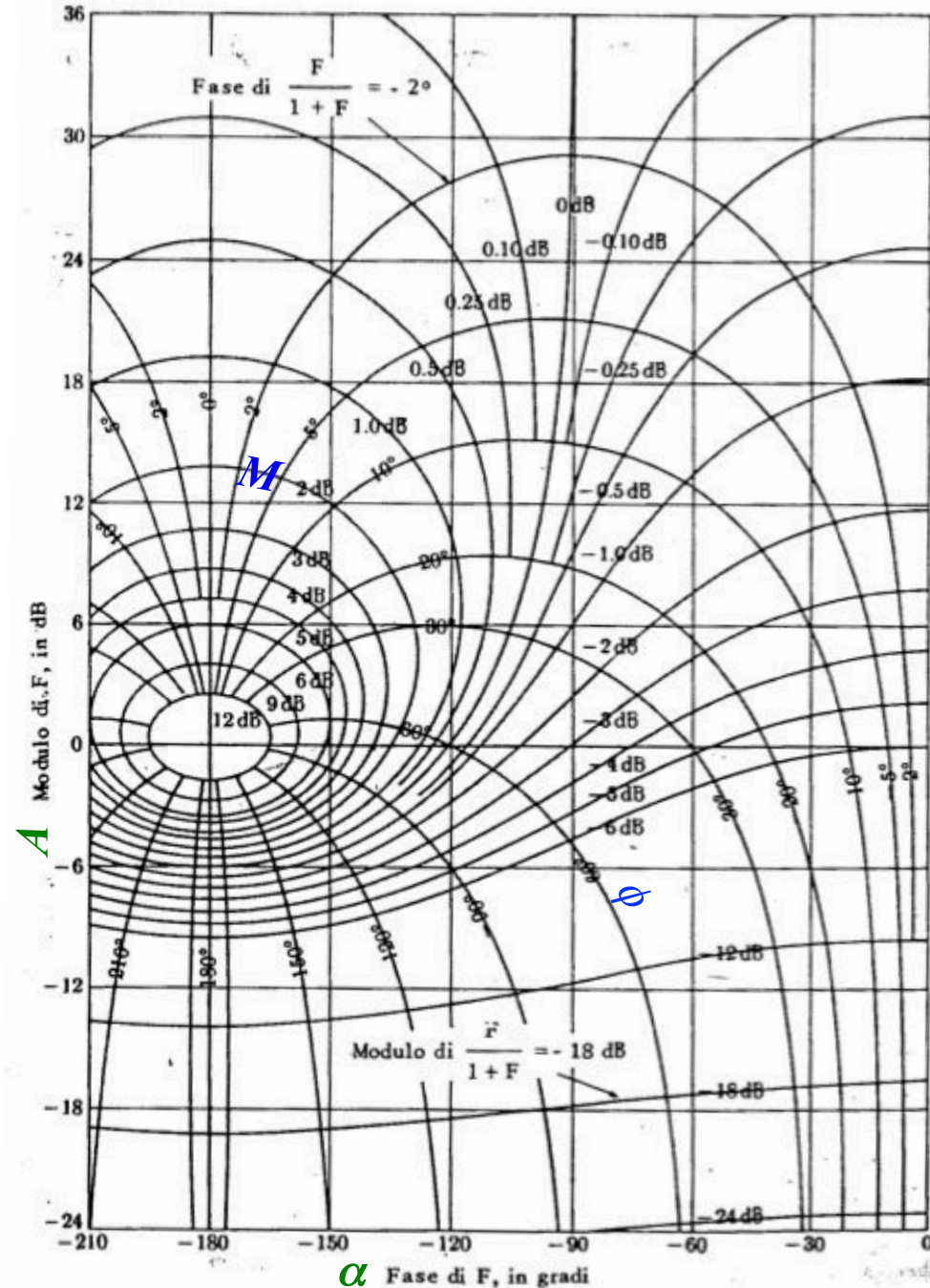
(simmetria)

$$\phi(A, \alpha) = -\phi(A, -\alpha)$$

(antisimmetria)



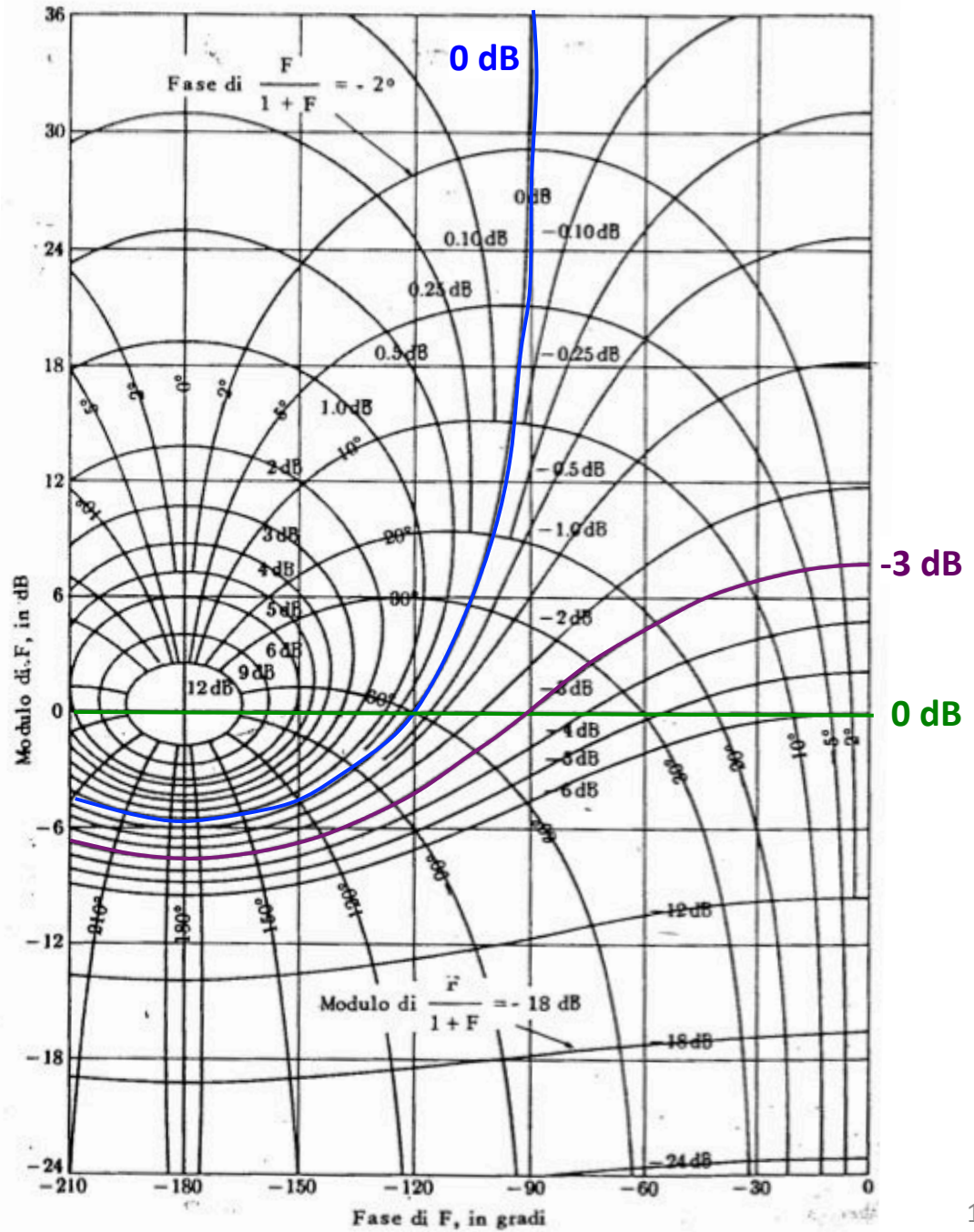
regione di interesse
riportata
 $\alpha \in [-180^\circ, 0^\circ]$



zone notevoli
sulla carta di Nichols

$|F| \gg 1$ (parte alta)
 $\Rightarrow |W| \cong 1 = 0 \text{ dB}$
 tutta la zona è a $\approx 0 \text{ dB}$

$|F| \ll 1$ (parte bassa)
 $\Rightarrow |W| \cong |F|$
 le coordinate curvilinee
 si 'rettificano'



parametri frequenziali sul
diagramma di Nichols di $F(j\omega)$
tracciato sulla carta

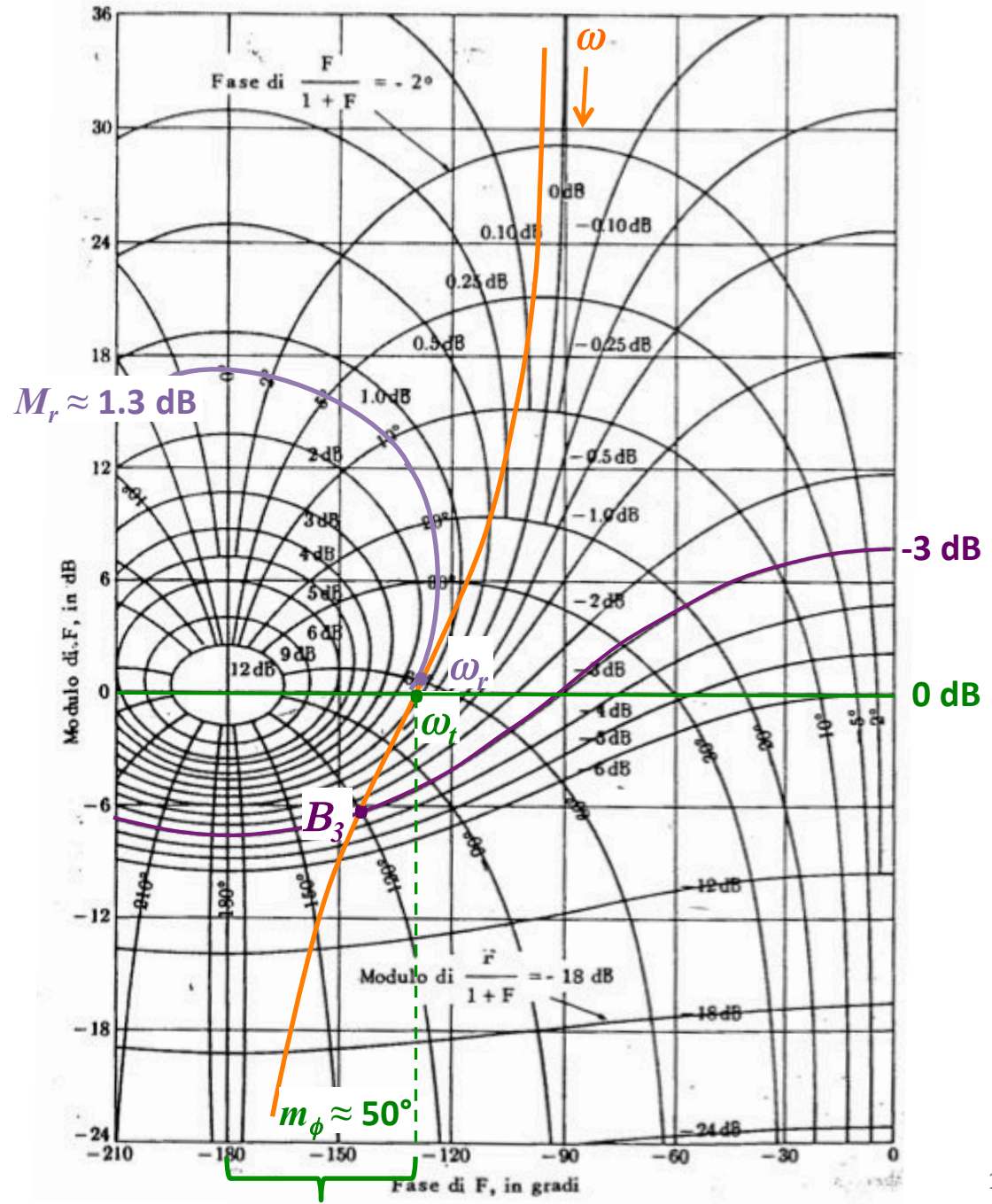
$$\omega_t \therefore |F(j\omega_t)| = 0 \text{ dB}$$

$$m_\phi = 180^\circ + \langle F(j\omega_t) \rangle$$

$$\omega_r \therefore |W(j\omega_r)| = \max_{\omega} |W(j\omega)|$$

$$M_r = |W(j\omega_r)|$$

$$B_3 \therefore |W(jB_3)| = -3 \text{ dB}$$



legame approssimati (**di progetto**)
 tra parametri in frequenza
 ad **anello chiuso** e **anello aperto**

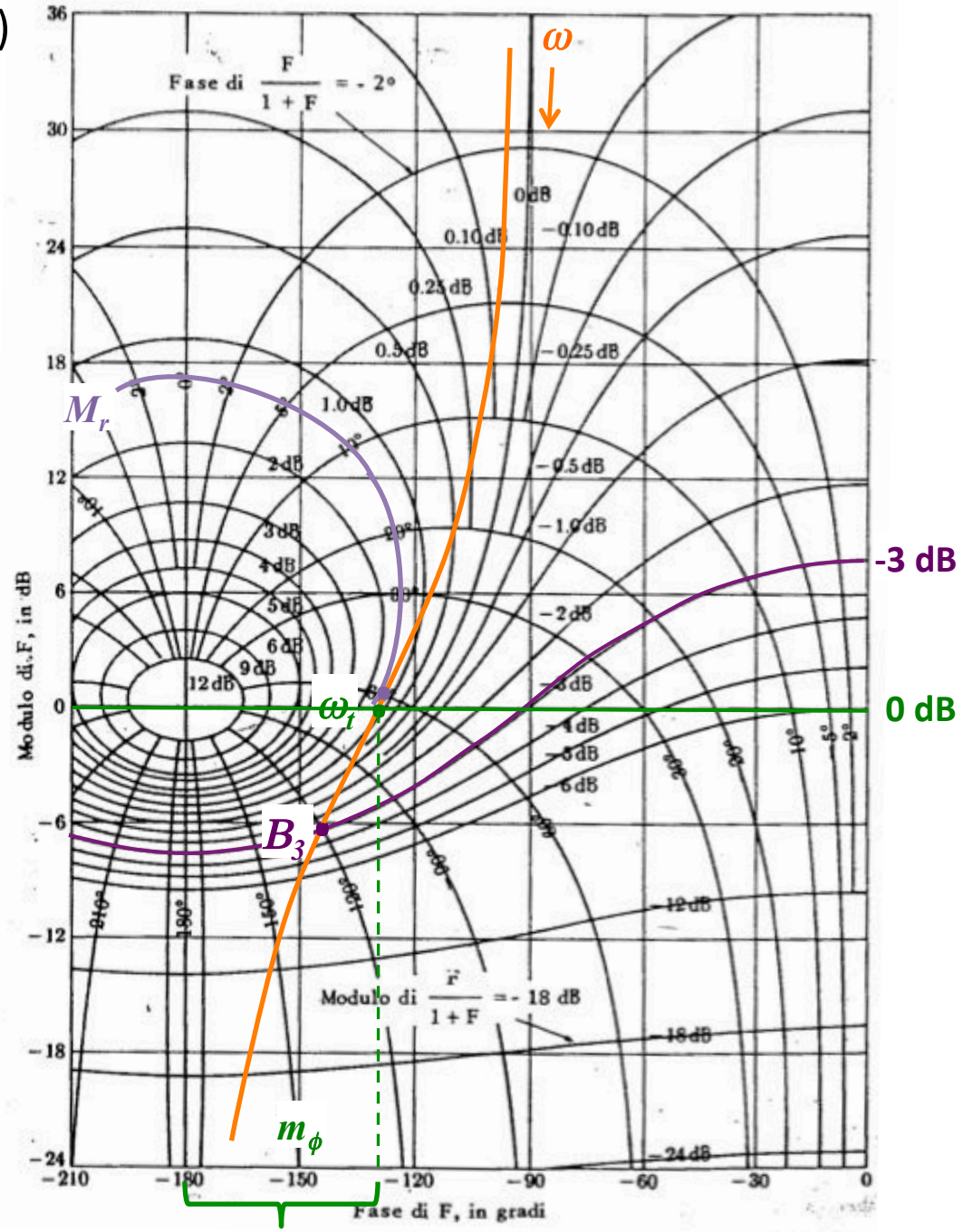
a) $\omega_t \leq B_3 \leq 2\omega_t$

↑ sempre vera per $m_\phi \in [15^\circ, 90^\circ]$
 ↑ nell'ipotesi che intorno a ω_t il modulo scenda -20dB/decade (= -6dB/ottava)

b) $\max M_r \Rightarrow \min m_\phi$ necessario

$m_\phi \geq 60^\circ - 6M_r|_{dB}$

↑ uguaglianza esatta per
 per $m_\phi = 60^\circ$ (con $M_r = 0$ dB)



- esempio di uso delle relazioni di progetto in frequenza **anello chiuso** e **anello aperto**

$$F(s) = \frac{1}{s(1+s)}$$



$$\omega_t = 0.8 \text{ [rad/s]}$$

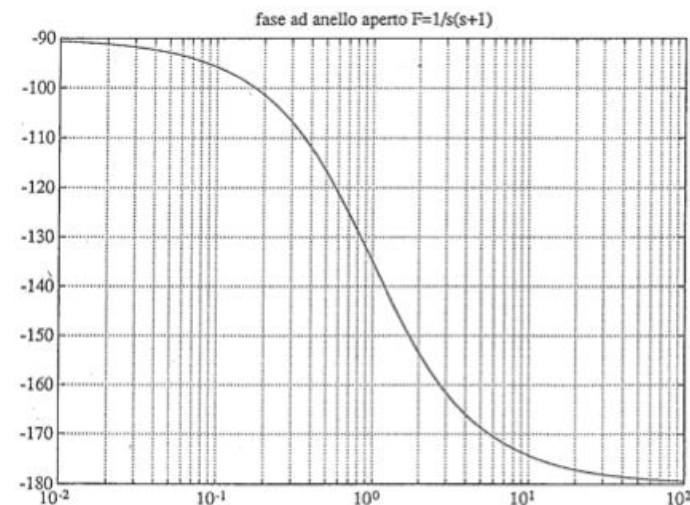
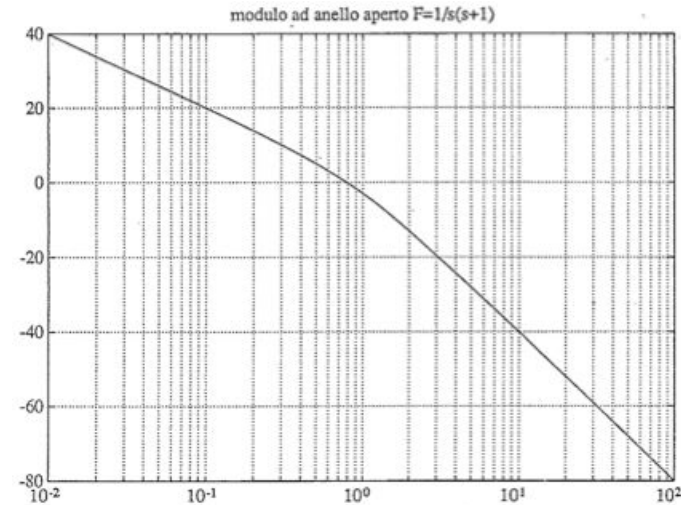
$$m_\varphi = 50^\circ$$



- previsioni

$$B_3 \in (0.8 \div 1.6) \text{ [rad/s]}$$

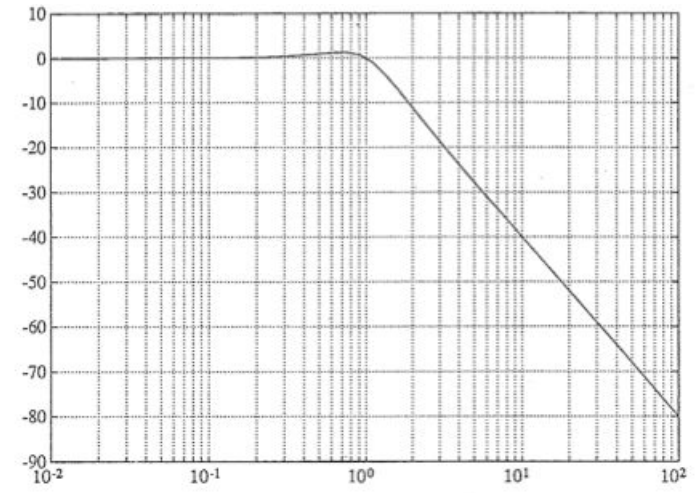
$$M_r \approx 1.7 \text{ dB}$$



- esempio di uso delle relazioni di progetto in frequenza **anello chiuso** e **anello aperto**

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

$$= \frac{1}{1 + s + s^2} \quad (\omega_n = 1, \zeta = 0.5)$$



- attuali

$$B_3 = 1.3 \text{ [rad/s]}$$

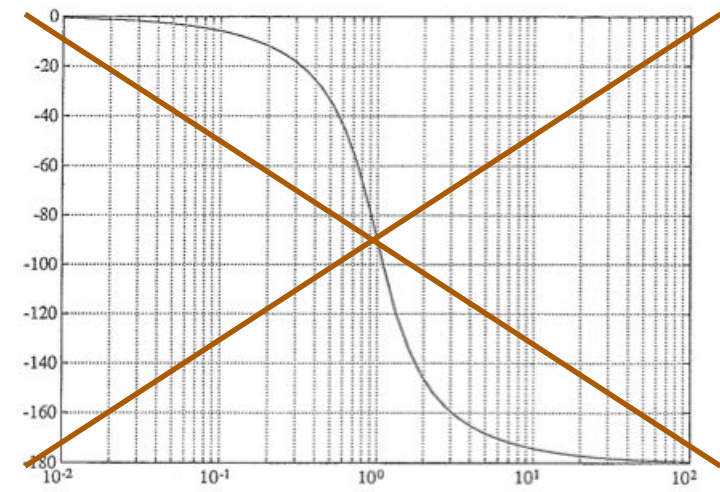
$$M_r \approx 1.25 \text{ dB}$$



- previsioni

$$B_3 \in (0.8 \div 1.6) \text{ [rad/s]}$$

$$M_r \approx 1.7 \text{ dB}$$



questo non serve!